INTORNO AD UN TEOREMA

per lo sviluppo in serie

DELLE FUNZIONI FRATTE RAZIONALI

PER

N. TRUDI

Studiando la bella soluzione del SYLVESTER di un problema sulla partizione de' numeri (*), non tardammo a riconoscere che essa conduce ad un teorema importante per lo sviluppo in serie delle funzioni fratte razionali, preferibile in molti casi ad altri mezzi di sviluppo. L'esposizione di questo teorema formerà il soggetto della presente nota.

È qui necessario di richiamare alcune nozioni intorno allo sviluppo della funzione $\frac{1}{(1-e^{-t})^r}$ (**) in potenze ascendenti della variabile t, dove r dinota un numero intero e positivo. È evidente che i primi r termini di que-

(*) V. una nota del chiar. Prof. BRIOSCHI nel tom. 8° degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* del TORTOLINI, a pag. 5.

(**) Lo sviluppo di questa e somiglianti funzioni sono stati da noi dati nella memoria su' numeri ultra-Bernoulliani, traendoli immediatamente da una proprietà della funzione:

$$y=\frac{1}{1-\alpha e^{x}},$$

per quanto semplice, altrettanto osservabile, la quale può nunciarsi come segue:

Ogni potenza intera e positiva della funzione y può essere trasformata in una funzione lineare della stessa y e delle sue successive derivate y', y'', y''', ... fino a quella di un ordine inferiore di una unità al grado della potenza. Se r è il grado della potenza, dinotata con C_i la somma de' prodotti ad i ad i de' numeri 1, 2, ... (r—1), si ha:

$$(o)\qquad y^r=\frac{1}{1.2.3\ldots(r-1)}\left[C_0 y^{(r-1)}+C_1 y^{(r-2)}+C_2 y^{(r-3)}+\ldots+C_{r-2}y'+C_{r-1}y\right].$$

Applicando questo teorema alla funzione:

$$y=\frac{1}{1-e^{x}},$$

osserveremo che il suo sviluppo in potenze ascendenti di x ha il solo primo termine affetto dalla po-

*

sto sviluppo debbono essere affetti da potenze negative di t; ed essendo essi i soli che attualmente occorre di considerare, scriveromo:

$$\frac{1}{(1-e^{-t})^r}=\frac{A_0}{t^r}+\frac{A_1}{t^{r-1}}+\frac{A_2}{t^{r-2}}+\ldots+\frac{A_i}{t^{r-i}}+\ldots+\frac{A_{r-1}}{t}+\ldots$$

Ecco poi la definizione de' coefficienti. Dinotata con C_i la somma de' prodotti ad i ad i de' numeri consecutivi 1, 2, 3,..., $r-1$, si ha in generale:

$$A_i=\frac{C_i}{(r-i)(r-i+1)(r-i+2)\ldots(r-1)}$$

e quindi risulta:

$$(1)\quad \frac{1}{(1-e^{-t})^r}=\frac{C_0}{t^r}+\frac{C_1}{(r-1)t^{r-1}}+\frac{C_2}{(r-2)(r-1)t^{r-2}}+\ldots+\frac{C_{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)t}+\ldots$$

Per la definizione del simbolo C_i i valori dell' indice i si estendono da 1 ad $r-1$; ed in quanto all' ultimo valore si ha evidentemente:

$$C_{r-1}=1.2.3\ldots(r-1).$$

Per valori di i maggiori di $r-1$ bisogna ritenere $C_i=0$; e per $i=0$, la considerazione dello sviluppo diretto mostra che $C_0=1$.

Supposto che una funzione qualunque Fx sia sviluppata secondo le potenze ascendenti della variabile x, per dinotare di una maniera espli-

tenza negativa x^{-1}, di modo che chiamando X tutta la parte dello sviluppo, che comprende le potenze positive, si avrà:

$$y=-\frac{1}{x}+X;$$

e quindi prendendo le successive $r-1$ derivate:

$$y'=\frac{1}{x^2}+X',\ y''=-\frac{1.2}{x^3}+X'',\ y'''=\frac{1.2.3}{x^4}+X''',\ldots,\ y^{(r-1)}=(-1)^r\frac{1.2\ldots(r-1)}{x^r}+X^{(r-1)}.$$

Per la sostituzione di questi valori nella formola (a), tenendo conto de' soli termini frazionarii rispetto ad x, risulta

$$\frac{1}{(1-e^x)^r}=(-1)^r\left[\frac{C_0}{x^r}-\frac{C_1}{(r-1)x^{r-1}}+\frac{C_2}{(r-2)(r-1)x^{r-2}}-\ldots+(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{1.2\ldots(r-1)x}\right]+\ldots$$

ed in fine, cambiando la x in $-t$, si ha la formola (1) data nel testo.

cita e generale il coefficiente di una potenza individuata della variabile, come x^p, seguendo l'illustre Jacobi scriveremo:

$$\left[\mathrm{F}x\right]_{x^p},$$

chiudendo cioè tra parentesi la data funzione, ed apponendovi come indice esterno la potenza istessa della variabile, con che si hanno sott'occhio tutti gli elementi della quistione.

Premesse tali cose dimostreremo la formola seguente:

$$(2) \qquad \left[\frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^r}\right]_{t^{-1}} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)};$$

la quale adunque significa che nello sviluppo della funzione $\frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^r}$ in potenze ascendenti di t, il coefficiente di $\frac{1}{t}$ è uguale al numero iscritto nel secondo membro.

In fatti questo sviluppo può ottenersi moltiplicando la serie (1) per l'altra:

$$e^{nt}=1+\frac{n}{1}t+\frac{n^2}{1.2}t^2+\ldots+\frac{n^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}t^{r-1}+\ldots;$$

ma se si cerca il solo termine affetto dalla potenza, si potrà subito calcolarlo scrivendo in ordine inverso i primi r termini di quest'ultima serie, cioè nell'ordine seguente:

$$\frac{n^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}t^{r-1}+\frac{n^{r-2}}{1.2\ldots(r-2)}t^{r-2}+\ldots+\frac{n^2}{1.2}t^2+\frac{n}{1}t+1,$$

ed allora moltiplicando questi r termini, uno ad uno, pe' primi r termini della serie (1), i prodotti saranno tutt'i termini del detto sviluppo affetti dalla potenza $\frac{1}{t}$, la quale perciò avrà per coefficiente:

$$\frac{C_0 n^{r-1}+C_1 n^{r-2}+C_2 n^{r-3}+\ldots+C_{r-2}n+C_{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)}.$$

Ma siccome $C_0=1$, e C_1, C_2, C_3,... dinotano rispettivamente la somma de' numeri $1, 2, 3, \ldots, r-1$; la somma de'loro prodotti a due a due; quella de'loro prodotti a tre a tre; etc. etc., ne segue che il numeratore

di questa frazione equivale al prodotto $(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)$; e con ciò la formola resta dimostrata.

Si perviene ad un'altra relazione dello stesso genere considerando il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo della funzione $\frac{e^{(n+1)t}}{(e^t-1)^r}$. La serie (1), mutandovi la t in $-t$, porge:

$$\frac{1}{(e^t-1)^r}=\frac{C_0}{t^r}-\frac{C_1}{(r-1)\,t^{r-1}}+\frac{C_2}{(r-2)(r-1)\,t^{r-2}}-\ldots+(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{1.2.3.\ldots(r-1)\,t}\pm\ldots$$

e si ha inoltre:

$$e^{(n+1)t}=1+\frac{n+1}{1}\,t+\frac{(n+1)^2}{1.2}\,t^2+\ldots+\frac{(n+1)^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\,t^{r-1}+\ldots$$

Quindi, operando come nel caso precedente, si trova che nel prodotto di queste due serie il coefficiente di $\frac{1}{t}$ è espresso dalla frazione:

$$\frac{C_0(n+1)^{r-1}-C_1(n+1)^{r-2}+C_2(n+1)^{r-3}-\ldots+(-1)^{r-1}C_{r-1}}{1.2.3\ldots(r-1)}\,;$$

ma atteso il significato di $C_0, C_1, C_2, \ldots$, il numeratore equivale al prodotto $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$; dunque risulta:

$$\left[\frac{e^{(n+1)t}}{(e^t-1)^r}\right]_{t^{-1}}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)}\,. \tag{3}$$

Passando ora al soggetto della presente nota supporremo che si tratti di sviluppare in potenze ascendenti di x la funzione fratta $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, dove con $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ intendiamo funzioni intere di gradi qualunque, ma riterremo il grado della prima inferiore a quello della seconda. Dinotate con $a, b, c, \ldots, l$ le radici distinte dell' equazione $\psi(x)=0$, e con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ i loro gradi rispettivi di moltiplicità, si avrà:

$$\psi(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma\ldots(x-l)^\lambda\,;$$

quindi, se la data frazione s'immagini decomposta in frazioni semplici, e s'indichi con $f_a(x)$ la somma di quelle provvenienti dalla radice a;

con $f_b(x)$ la somma di quelle provvenienti dalla radice b; e così per le altre, si potrà supporre:

$$f_a(x)=\sum_1^{\alpha}{}_r\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{(x-a)^r}\,,\quad f_b(x)=\sum_1^{\beta}{}_r\frac{\mathrm{B}_{\beta-r}}{(x-b)^r}\,,\;\ldots\,,\; f_l(x)=\sum_1^{\lambda}{}_r\frac{\mathrm{L}_{\lambda-r}}{(x-l)^r}\,,$$

e la proposta frazione verrà trasformata nella somma:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=f_a(x)+f_b(x)+\ldots+f_l(x)\,. \tag{4}$$

Sia P_n il coefficiente della potenza x^n nello sviluppo del primo membro di questa identità; è chiaro che esso equivale alla somma de' coefficienti della stessa potenza negli sviluppi di tutte le frazioni semplici comprese nel secondo; sicchè può riguardarsi come formato da tante parti quante sono le radici $a, b, \ldots, l$; e però se queste parti si dinotino rispettivamente con $\mathrm{P}_{n,a}, \mathrm{P}_{n,b}, \ldots, \mathrm{P}_{n,l}$, sarà:

$$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_{n,a}+\mathrm{P}_{n,b}+\ldots+\mathrm{P}_{n,l}\,,$$

o sotto forma più concisa:

$$\mathrm{P}_n=\Sigma\mathrm{P}_{n,a}\,,$$

intendendo comprese nella sommatoria le parti dovute a tutte le radici.

Segue pertanto dalle precedenti convenzioni che $\mathrm{P}_{n,a}$ esprime il coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione:

$$f_a(x)=\sum_1^{\alpha}{}_r\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{(x-a)^r}=\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{(a-x)^r}\,; \tag{5}$$

e siccome nello sviluppo della frazione sotto l'ultimo Σ la potenza x^n ha per coefficiente:

$$\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{a^{n+r}}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}$$

così risulta:

$$\mathrm{P}_{n,a}=\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{a^{n+r}}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots(r-1)}$$

ma applicando la formola (2) potremo scrivere invece:

$$\mathrm{P}_{n,a}=\left[\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{\mathrm{A}_{\alpha-r}}{a^{n+r}}\,\frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})^r}\right]_{t^{r-1}}\,. \tag{6}$$

Ciò premesso, se si moltiplica per x^{-n} l'eguaglianza (4), si avrà:

$$x^{-n}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=x^{-n}f_a(x)+x^{-n}f_b(x)+\ldots+x^{-n}f_l(x)\,. \tag{7}$$

Ora pongasi tra x e t la relazione:

$$x=ae^{-t}\;;$$

così i due membri della (7), mutandovi la x in ae^{-t}, diverranno funzioni di t; e ne'loro rispettivi sviluppi saranno uguali i coefficienti di $\frac{1}{t}$. È osservabile però che gli sviluppi di $a^{-n}e^{nt}f_b(ae^{-t}),\ldots,a^{-n}e^{nt}f_l(ae^{-t})$ non possono contenere potenze negative di t; di modo cho si avrà semplicemente:

$$a^{-n}\left[e^{nt}\frac{\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}\right]_{t^{-1}}=a^{-n}\left[e^{nt}f_a(ae^{-t})\right]_{t^{-1}}\,. \tag{8}$$

Da un'altra parte essendo per la (5):

$$x^{-n}f_a(x)=\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r A_{\alpha-r}\frac{x^{-n}}{(a-x)^r}\,,$$

cambiando la x in ae^{-t}, verrà:

$$a^{-n}\left[e^{nt}f_a(ae^{-t})\right]_{t^{-1}}=\left[\sum_1^{\alpha}{}_r(-1)^r\frac{A_{\alpha-r}}{a^{n+r}}\frac{e^{nt}}{(1-e^{-t})}\right]_{t^{-1}}\;;$$

e quindi, tenendo presente la (6) e la (8), risulta in fine la formola seguente:

$$P_{n,a}=a^{-n}\left[e^{nt}\frac{\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}\right]_{t^{-1}}\,, \tag{9}$$

donde l'altra:

$$P_n=\left[\sum a^{-n}e^{nt}\frac{\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}\right]_{1^{-1}}\,. \tag{10}$$

Questa formola importante a più riguardi, ed innanzi tutto perchè, tolta di mezzo la decomposizione della data frazione in frazioni parziali, fa dipendere immediatamento il valore di $P_{n,a}$, e quindi anche quello di P_n, dalle stesse funzioni iniziali φ e ψ, costituisce il teorema fondamentale

della presente nota, e che si traduce come segue in linguaggio ordinario.

Nello sviluppo ascendente della frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *il coefficiente di* x^n *è la somma di tante parti diverse, quante sono le radici distinte dell'equazione* $\psi x = 0$, *e la parte dovuta ad una radice qualunque* a *è uguale al coefficiente di* $\frac{1}{t}$ *nello sviluppo ascendente della funzione di* t, *in cui si trasforma il prodotto* $x^{-n} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *mutandovi la* x *in* ae^{-t}.

In quanto al coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo ascendente della funzione:

$$\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}, \tag{11}$$

il mezzo più naturale per calcolarlo (almeno in generale) consiste nel sostituire alle esponenziali i loro sviluppi, e quindi dividere il numeratore pel denominatore, finchè si pervenga al termine affetto da t^{-1}; ma per ciò sono indispensabili alcune dilucidazioni. Certamente questo sviluppo deve contenere potenze negative di t, il che importa che il denominatore $\psi(ae^{-t})$ debba essere divisibile per una potenza positiva di t, come bene è provato dall'analisi precedente; e di fatti basta osservare che nella espressione di $P_{n,0}$ data dalla (6), le frazioni comprese nella sommatoria hanno per denominatori i binomii $1-e^{-t}$, $(1-e^{-t})^2, \ldots,$ $(1-e^{-t})^{\alpha}$, evidentemente divisibili per $t, t^2, \ldots, t^{\alpha}$; e perciò la funzione $\psi(ae^{-t})$ sarà necessariamente affetta dal fattore t^{α}, dinotando α il grado di moltiplicità della radice a. Però, siccome l'esistenza di un tal fattore non è punto un fatto immediato, così è d'uopo di comprovarla direttamente, onde non essere arrestato nelle applicazioni.

Supponiamo:

$$\psi(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + \ldots + l_{\mu} x^{\mu}$$

e pongasi $x = ae^{-t}$, dinotando a una costante qualunque; si avrà:

$$\psi(ae^{-t}) = l_0 + l_1 ae^{-t} + l_2 a^2 e^{-2t} + l_3 a^3 e^{-3t} + \ldots + l_{\mu} a^{\mu} e^{-\mu t};$$

ma, sostituendo alle esponenziali i loro sviluppi, il risultamento avrà la forma:

$$\psi(ae^{-t}) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \ldots + k_i t^i + \ldots \tag{12}$$

2

dove però si ha con legge manifesta:

$$k_0 = l_0 + l_1 a + l_2 a^2 + l_3 a^3 + \ldots + l_\mu a^\mu$$

$$k_1 = - \left[1.l_1 a + 2\, l_2 a^2 + 3\, l_3 a^3 + \ldots + \mu\, l_\mu a^\mu\right]$$

$$k_2 = \frac{1}{1.2} \left[1^2 l_1 a + 2^2 l_2 a^2 + 3^2 l_3 a^3 + \ldots + \mu^2 l_\mu a^\mu\right]$$

$$k_3 = \frac{-1}{1.2.3} \left[1^3 l_1 a + 2^3 l_2 a^2 + 3^3 l_3 a^3 + \ldots + \mu^3 l_\mu a^\mu\right]$$

. . . .

$$k_i = \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i} \left[1_i l_1 a + 2_i l_2 a^2 + 3^i l_3 a^3 + \ldots + \mu^i l_\mu a^\mu\right] \;(*)$$

. . . .

Ciò premesso, ammettendo che a sia radice multipla di grado α dell'equazione $\psi(x)=0$, conformemente a ciò che si è detto bisognerebbe che il secondo membro della (12) fosse divisibile per t^α, e quindi nulle le espressioni di $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha-1}$; ma questo è ciò che punto non vedesi, salvo che per la prima k_0. E tuttavia qui non trattasi che di una conseguenza immediata di un importante teorema relativo alla teoria generale delle equazioni, ma trascurato da tutti gli scrittori di algebra del secolo presente. Intendiamo qui parlare del teorema di HUDDE, il quale può così enunciarsi. « Se un'equazione abbia una o più radici multiple, moltipli- « cando i suoi termini pe' termini di qualsivoglia progressione aritmetica, « uno ad uno, la nuova equazione conterrà le stesse radici multiple; ma « il grado di multiplicità di ciascuna vi sarà diminuito di una unità ». Segue da questo teorema che se un'equazione abbia una radice a, mul-

(*) Siccome

$$\psi a = l_0 + l_1 a + l_2 a^2 + \ldots + l_\mu a^\mu,$$

è evidente che la funzione:

$$1^i l_1 a + 2^i l_2 a^2 + 3^i l_3 a^3 + \ldots + \mu^i l_\mu a^\mu$$

si ottiene operando sopra ψa col simbolo di derivazione $(aD_a)^i$; di modo che si ha in generale.

$$k_i = \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i}(aD_a)^i \psi a;$$

e sarà quindi:

$$k_1 = -(aD_a)\psi a, \quad k_2 = \frac{1}{1.2}(aD_a)^2 \psi a, \quad k_3 = -\frac{1}{1.2.3}(aD_a)^3 \psi a, \quad \text{etc.}$$

tipla di grado p, moltiplicando successivamente i suoi termini pe'termini di $p-1$ progressioni aritmetiche, sia diverse, sia le stesse, le risultanti $p-1$ equazioni conterranno tutte la radice a; però la prima la conterrà $p-1$ volte; la seconda $p-2$; la terza $p-3$; e così di seguito fino all'ultima, nella quale la radice a sarà divenuta semplice.

Venendo ora al caso nostro dobbiamo solo osservare che le espressioni di $k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha-1}$, a parte i segni ed i moltiplicatori numerici, sono ciò che diviene il primo membro dell'equazione:

$$\psi(x)=l_0+l_1x+l_2x^2+l_3x^3+\ldots+l_\mu x^\mu=0\ ,$$

moltiplicandone i termini $\alpha-1$ volte di seguito pe'termini della stessa progressione aritmetica: $0, 1, 2, 3, \ldots, \mu$, e poi mutando x in a. Quindi, essendo a radice multipla dell'equazione $\psi(x)=0$ di grado α, risulta senza più $k_1=0,\ k_2=0, \ldots,\ k_{\alpha-1}=0$.

Segue da quanto precede che lo sviluppo della funzione $\psi(ae^{-t})$ deve mancare de'primi α termini, e ridursi alla forma:

$$\psi(ae^{-t})=t^\alpha\left[k_\alpha+k_{\alpha+1}t+k_{\alpha+2}t^2+\ldots\right]$$

ma posto:

$$\theta t=k_\alpha+k_{\alpha+1}t+k_{\alpha+2}t^2+\ldots \tag{13}$$

verrà:

$$\psi(ae^{-t})=t^\alpha\theta t\ .$$

Avremo adunque:

$$\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}=\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{t^\alpha\theta t}\ ;$$

e ciò dimostra che il coefficiente di $\frac{1}{t}$ nello sviluppo del primo membro è uguale al coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo della funzione:

$$\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta t}\ ;$$

in conseguenza di che le formole (9) e (10) divengono:

$$P_{n,a}=\left[a^{-n}\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta t}\right]_{t^{\alpha-1}} \tag{14}$$

$$P_n=\Sigma\left[a^{-n}\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta t}\right]_{t^{\alpha-1}}\ . \tag{15}$$

Supponendo:

$$e^{nt}\varphi(ae^{-t})=h_0+h_1t+h_2t^2+\dots$$

risulta:

$$\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta t}=\frac{h_0+h_1t\ \ +h_2t^2\ \ +\dots}{k_\alpha+k_{\alpha+1}t+k_{\alpha+2}t^2+\dots};$$

e quindi si vede che la ricerca del valore di $P_{n,a}$ si riduce a calcolare nell'ultima divisione il coefficiente della potenza $t^{\alpha-1}$; ma, condotta la quistione a tal punto, pel calcolo effettivo di quel coefficiente rimandiamo alle formole già date per lo stesso oggetto nella memoria sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali.

I risultamenti che precedono parrebbero poco utili finchè non si conoscano le radici dell'equazione $\psi x=0$; ma qui, come nella memoria citata, il valore di P_n si può facilmente tradurre in somme di potenze simili delle radici di una o più equazioni.

Osserviamo dapprima che, se a è radice semplice dell'equazione $\psi x=0$, vale a dire se $\alpha=1$, il valore di $P_{n,a}$ si ottiene immediatamente, perchè essendo uguale al primo termine dello sviluppo della funzione che figura nel secondo membro della (14), esso è ciò che diviene la stessa funzione per $t=0$; e così si avrebbe:

$$P_{n,a}=a^{-n}\frac{\varphi(a)}{\theta(o)}.$$

Ora, essendo $\alpha=1$, in virtù della (13) si ha $\theta(o)=k_1$; ma si è veduto che $k_1=-(aD_a)\psi a=-a\psi'a$; dunque risulta:

$$P_{n,a}=-a^{-(n+1)}\frac{\varphi a}{\psi' a},$$

come nella memoria anzidetta fu trovato per altra via.

Ciò premesso s'indichi con g il grado dell'equaziono $\psi x=0$. Se le sue radici sono disuguali, l'espressione di P_n sarà definita dalla formola:

$$P_n=\Sigma-a^{-(n+1)}\frac{\varphi a}{\psi' a},$$

nella quale la sommatoria va estesa a tutte le radici della detta equazione. Intanto, siccome $\psi a=0$, la frazione $\frac{\varphi a}{\psi' a}$ si potrà trasformare in una

determinata funzione intera di a, di grado inferiore a g; e però, immaginando operata questa trasformazione, porremo:

$$\frac{\varphi a}{\psi' a}=A_0+A_1 a+A_2 a^2+\ldots A_{g-1}a^{g-1}\ ,$$

dove i coefficienti A_0, $A_1, \ldots, A_{g-1}$, indipendenti da a, sono numeri conosciuti, i cui valori dipendono soltanto dalle costanti delle funzioni φx e ψx. L'espressione di P_n diviene in conseguenza:

$$P_n=\Sigma - a^{-(n+1)}\left(A_0+A_1 a+A_2 a^2+\ldots+A_{g-1}a^{g-1}\right)$$

ed effettuando la moltiplicazione sotto il Σ si avrà:

$$P_n=\Sigma\left(A_0 a^{-(n+1)}+A_1 a^{-n}+A_2 a^{-(n-1)}+\ldots+A_{g-1}a^{-(n-g+2)}\right).$$

È ora evidente che per estendere questa somma a tutte le radici dell'equazione $\psi x=0$ non si ha che a mutare le potenze di a in somme di potenze delle radici dell'equazione $\psi x=0$, di gradi uguali a quelli delle stesse potenze di a; e però dinotato con s_i la somma delle potenze i^{esime} delle radici dell'equazione $\psi\left(\frac{1}{x}\right)=0$, risulterà:

$$P_n=A_0 s_{n+1}+A_1 s_n+A_2 s_{n-1}+\ldots+A_{g-1}s_{n-g+2}\ .$$

Intorno a questa formola crediamo di dover ripetere alcune osservazioni già fatte nella memoria ricordata più sopra. Essa costa di g termini, cioè di tanti termini quante sono le unità del grado di ψx, e gl'indici delle s vi formano una progressione di numeri naturali decrescenti che comincia da $n+1$. Però le ultime condizioni non sono assolute, e la serie degl'indici, crescente o decrescente come si voglia, può farsi cominciare da qualunque altro numero. Volendo per esempio che sia crescente, e cominci da n, si osserverà che:

$$-\frac{\varphi a}{\psi' a}a^{-(n+1)}=-\frac{a^{g-2}\varphi a}{\psi' a}a^{-(n+g-1)}\ ;$$

quindi invece della frazione $-\frac{\varphi a}{\psi' a}$ si trasformerà la frazione $-\frac{a^{g-2}\varphi a}{\psi' a}$; ed allora supponendo:

$$-\frac{a^{g-2}\varphi a}{\psi' a}=A_0 a^{g-1}+A_1 a^{g-2}+\ldots+A_{g-2}a+A_{g-1}\,,$$

verrà:

$$P_n=\Sigma\left(A_0 a^{g-1}+A_1 a^{g-2}+\ldots+A_{g-2}a+A_{g-1}\right)a^{-(n+g-1)}\,,$$

ossia:

$$P_n=\Sigma\left(A_0 a^{-n}+A_1 a^{-(n+1)}+\ldots+A_{g-2}a^{-(n+g-2)}+A_{g-1}a^{-(n+g-1)}\right)\,;$$

e quindi risulta:

$$P_n=A_0 s_n+A_1 s_{n+1}+\ldots+A_{g-2}s_{n+g-2}+A_{g-1}s_{n+g-1}$$

formola in cui la serie degl'indici cresce, e comincia da n.

Supponiamo ora che l'equazione $\psi x=0$ ammetta diverse classi di radici multiple, o con altre parole supponiamo che la funzione ψx sia risoluta, o possa risolversi in più fattori razionali primi tra loro, ed abbia la forma:

$$\psi x=(\psi_1 x)^{\alpha_1}(\psi_2 x)^{\alpha_2}\ldots(\psi_r x)^{\alpha_r}$$

dove con $\psi_1 x, \psi_2 x, \ldots, \psi_r x$ intendiamo funzioni qualunque intere, prime tra loro, niuna delle quali abbia fattori lineari multipli, e siano $g_1, g_2, \ldots, g_r$ i loro gradi rispettivi. Così le radici dell'equazioni:

$$\psi_1(x)=0\,,\qquad \psi_2(x)=0\,,\ \ldots\,,\ \psi_r(x)=0$$

saranno tutte disuguali, ma saranno multiple in riguardo all'equazione $\psi x=0$, e propriamente quelle della prima, $\psi_1 x=0$, multiple di grado α_1; quelle della seconda, $\psi_2 x=0$, multiple di grado α_2; e così di seguito.

Posto ciò, considerando le parti di P_n dovute a tutte le radici di una qualunque delle dette equazioni, per esempio $\psi_i x=0$, si riconosce facilmente che le loro espressioni sono funzioni simili delle stesse radici; di modo che la loro somma sarà una funzione simmetrica delle radici medesimo, e sarà perciò esprimibile razionalmente per mezzo de'coefficienti di quell'equazione. Ora questa funzione simmetrica, la quale costituisce tutta la parte di P_n proveniente dal fattoro di ψx rappresentato con $(\psi_i x)^{\alpha_i}$, e che noi distinguiamo col nome di *componente razionale* di P_n dovuta al detto fattore, può come nel caso precedente tradursi in somme

di potenze simili delle radici dell'equazione $\psi_i x=0$. Indicando questa componente con W_i, il suo valore sarà dapprima definito dalla formola:

$$W_i=\sum_i\left[\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\psi(ae^{-t})}a^{-n}\right]_{t^{-1}},$$

nella quale la sommatoria va estesa a tutte le radici dell'equazione $\psi_i x=0$, il che intendiamo accennato dall'indice i apposto inferiormente al Σ. Intanto, siccome a è radico multipla di grado α_i dell'equaziono $\psi x=0$, la funzione $\psi(ae^{-t})$ sarà divisibile per t^{α_i}; questa funzione si potrà mettere in conseguenza sotto la forma:

$$\psi(ae^{-t})=t^{\alpha_i}\theta_i(t)\,.$$

ov'è fatto per compendio:

$$\theta_i(t)=(-1)^{\alpha_i}\left[\frac{(aD_a)\psi a}{(\alpha_i)'}-\frac{(aD_a)^2\psi a}{(\alpha_i+1)'}t+\frac{(aD_a)^3\psi a}{(\alpha_i+2)'}t^2-\ldots\right] \text{ (*)}$$

e quindi la formola precedente diverrà:

$$W_i=\sum\left[\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta_i(t)}a^{-n}\right]_{t^{\alpha-1}}$$

Ma se si dinota con $F_i(a)$ il coefficiente di $t^{\alpha-1}$ nello sviluppo di:

$$\frac{e^{nt}\varphi(ae^{-t})}{\theta_i(t)},$$

avremo ancora:

$$W_i=\sum_i F_i(a)\times a^{-n}\,.$$

Ora essendo $F_i a$ una funzione di a generalmente frazionaria; ed inoltre essendo a radice dell'equazione $\psi_i a=0$, che si suppone di grado g_i, potrà quella frazione essere trasformata in una determinata funzione intera di a, di grado inferiore a g_i. Immaginiamo operata questa trasformazione, e pongasi:

$$F_i a=A_0^{(i)}+A_1^{(i)}a+A_2^{(i)}a^2+\ldots+A_{g_i-1}a^{g_i-1}\,.$$

(*) Seguendo l'illustre Schlömilch scriviamo in generale p' (p con apostrofe) per indicare il prodotto di p numeri successivi $1, 2, 3, \ldots, p$.

Si ottiene in siffatta guisa:

$$W_s = \sum_i \left(A_0^{(i)} + A_1^{(i)} a + A_2^{(i)} a^2 + \ldots + A_{g_i-1} a^{g_i-1} \right) a^{-n}$$

ossia:

$$W_s = \sum_i \left(A_0^{(i)} a^{-n} + A_1^{(i)} a^{-(n-1)} + A_2^{(i)} a^{-(n-2)} + \ldots + A_{g_i-1} a^{-(n-g_i+1)} \right)$$

ed in fine dinotata con $s_p^{(i)}$ la somma delle potenze p^{esime} delle radici dell'equazione $\psi_i\left(\frac{1}{x}\right)=0$, risulterà:

$$W_s = A_0^{(i)} s_n^{(i)} + A_1^{(i)} s_{n-1}^{(i)} + A_2^{(i)} s_{n-2}^{(i)} + \ldots + A_{g_i-1}^{(i)} s_{n-g_i+1}^{(i)} .$$

Con lo stesso metodo si possono calcolare le espressioni di tutte lo altre componenti, e si avrà in conseguenza il valore di P_n espresso razionalmente per mezzo de'coefficienti delle funzioni φ e ψ.